E.N.S.I. 1985

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 2 h 30

PRÉAMBULE.

Si A est une matrice, ${}^tA$ désigne sa transposée.

On identifiera tout élément x de $\mathbb{R}^n$ avec la matrice unicolonne de ses composantes :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} ;$$

on pose :

$$\| x \| = \sqrt{{}^t x . x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} .$$

On utilisera les applications E et Tronc définies par :

$$E : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$x \longmapsto E(x) = \text{partie entière de } x.$$

$$\text{Tronc} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \text{Tronc}(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} \, 10^{-1} \, E(10\,|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \quad \text{si } x = 0. \end{cases}$$

***

Dans le problème qui suit, il s'agit de trouver la solution « aux moindres carrés » d'un système d'équations linéaires. La méthode étudiée est effectivement utilisée dans des applications de type traitement du signal ou commande pour l'identification de signaux en temps réels ou dans des applications pour lesquelles d'autres méthodes posent des difficultés d'ordre numérique.

***

Soit l'équation récurrente :

$$\begin{cases} y_{n+2} + 0{,}5\, y_{n+1} + 0{,}25\, y_n = 2\, r_n \qquad (n \in \mathbb{N}) \\ y_0 = 0 \qquad y_1 = 1 \end{cases}$$

$$\text{où} \qquad r_n = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad n \neq 2 \\ 1 \quad \text{si} \quad n = 2. \end{cases}$$

QUESTION 1.

Posons $z_n = \text{Tronc}\,(y_n) \quad (n \in \mathbb{N})$.

Calculer les valeurs de z_n pour $n = 0, 1, \ldots, 6$.

Soient les matrices et vecteurs :

$$A = \begin{pmatrix} y_1 & y_0 & r_0 \\ y_2 & y_1 & r_1 \\ y_3 & y_2 & r_2 \\ y_4 & y_3 & r_3 \\ y_5 & y_4 & r_4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} z_1 & z_0 & r_0 \\ z_2 & z_1 & r_1 \\ z_3 & z_2 & r_2 \\ z_4 & z_3 & r_3 \\ z_5 & z_4 & r_4 \end{pmatrix} \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{pmatrix}$$

QUESTION 2.

Quels sont les rangs des matrices A et $\overline{A}$?

Les systèmes linéaires $Ax = b$ et $\overline{A}x = \overline{b}$ admettent-ils des solutions ?

QUESTION 3.

Soit un élément $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^5$, u non nul.

Trouver un nombre réel $\alpha(u)$ (dépendant de u) tel que :

$$(u \,.\, {}^t u)\ (u \,.\, {}^t u) = \alpha(u)\ u \,.\, {}^t u \,.$$

Trouver un nombre réel $\beta(u)$ non nul tel que :

$$(I + \beta(u)\ u \,.\, {}^t u)^2 = I \,.$$

Dans toute la suite, on pose, pour tout élément u de $\mathbb{R}^5$:

$$T_u = \begin{cases} I + \beta(u)\ u \,.\, {}^t u & \text{si} \quad u \neq 0 \\ I & \text{si} \quad u = 0. \end{cases}$$

QUESTION 4.

Si la $i^{ième}$ composante de u est nulle, que vaut la $i^{ième}$ composante de $T_u\, v - v$, où v est un élément quelconque de $\mathbb{R}^5$?

QUESTION 5.

Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^5$

a. Soit u l'élément de $\mathbb{R}^5$ défini par :

$$u_1 = x_1 - \sqrt{\sum_{i=1}^{5} x_i^2}\,, \qquad u_i = x_i \qquad \text{pour} \qquad i = 2, 3, 4, 5\,.$$

Calculer $T_u\, x$.

b. Soit u' l'élément de $\mathbb{R}^5$ défini par :

$$u'_1 = 0\,, \qquad u'_2 = x_2 - \sqrt{\sum_{i=2}^{5} (x_i)^2}\,, \qquad u'_3 = x_3\,, \qquad u'_4 = x_4\,, \qquad u'_5 = x_5\,.$$

Calculer $T_{u'}\, x$.

QUESTION 6.

Montrer qu'il existe des éléments u, u', u'' de $\mathbb{R}^5$ et des nombres réels c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{22}, c_{23}, c_{33} tels que :

$$T_{u''}\, T_{u'}\, T_u\, \overline{A} = C,$$

$$\text{où } C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

QUESTION 7.

Montrer qu'il existe un élément u''' de $\mathbb{R}^5$ et des nombres réels d_1, d_2, d_3, d_4 tels que :

$$\begin{cases} T_{u'''}\, C = C \\ T_{u'''}\, T_{u''}\, T_{u'}\, T_u\, \overline{b} = d, \end{cases}$$

$$\text{où} \qquad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la suite, on pose :

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix} \qquad \overline{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$Q = T_{u''}\, T_{u'}\, T_{u'}\, T_u .$$

QUESTION 8.

Déduire des questions 6 et 7 qu'il existe $\overline{V}$ tel que :

$$\overline{C}\,\overline{V} = \overline{d}$$

QUESTION 9.

Montrer que ${}^tQ\ Q = I$ et en déduire que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^3 , \qquad \| Qx \| = \| x \| ,$$

puis que :

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^3 , \qquad \| \overline{A} X - \overline{b} \|^2 = \| \overline{C} X - \overline{d} \|^2 + d_4^2 .$$

QUESTION 10.

Montrer que :

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^3 , \qquad \| \overline{A}\,\overline{V} - \overline{b} \| \leqslant \| \overline{A} X - \overline{b} \| .$$

QUESTION 11.

En utilisant ce qui précède, développer une méthode de calcul de $\overline{V}$; calculer $\overline{V}$ et comparer le résultat avec le vecteur

$$\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}25 \\ 2 \end{pmatrix}.$$